اشتقاق معادلات لاغرانج من مبدأ دالمبير: دراسة تاريخية وتحليلية مع مقارنة تطبيقية

Derivation of Lagrange's Equations from D'Alembert's Principle:
A Historical and Analytical Study with Applied Comparison

إعداد الطالب: **أحمد مصطفى حسن**

تحت إشراف: **الأستاذ البروفيسور أنور بن رابعه**

دولة ليبيا، الأكاديمية الليبية، فرع مصراته، قسم الفيزياء

التاريخ: 20 أبريل 2026

المحتويات

1 المقدمة **2**

2 لمحة تاريخية **2**

3 المفاهيم الأساسية وتعريف الرموز **2**

4 مبدأ دالمبير (D'Alembert's Principle) **3**

5 الإحداثيات المعممة والتحويل الرياضي **4**

1.5 *اشتقاق السرعة والإزاحة الافتراضية 4

6 اشتقاق معادلات لاغرانج من مبدأ دالمبير **5**

1.6 *تجمع النتائج واستقلالية الإحداثيات 6

2.6 *الحالة الخاصة: القوى المحافظة 6

7 مثال تطبيقي: حركة جسيم على سطح مائل **7**

1.7 *الحل الخطوة بخطوة 7

2.7 *التحقق والمقارنة 8

8 مقارنة منهجية بين نيوتن ولاغرانج **9**

9 الخاتمة **9**

1 المقدمة

الميكانيكا الكلاسيكية تفرع إلى مدرستين رئيسيتين: الميكانيكا النيوتنية (المتجهية) والميكانيكا التحليلية (التي تبلورت على يد لاغرانج وهاميلتون). بينما تعتمد الميكانيكا النيوتنية على القوى والكميات المتجهة، تقدم الميكانيكا التحليلية إطارًا يعتمد على كميات قياسية (الطاقة الحركية والجهدية)، مما يبسط حل الأنظمة المقيدة. في هذا العرض التقديمي، نشتق معادلات لاغرانج انطلاقًا من مبدأ دالمبير، مع شرح كل خطوة رياضية، ثم نطبقها على مثال بسيط، ونقارن الطريقتين.

2 لمحة تاريخية

التطور التاريخي للميكانيكا التحليلية

- **نيوتن (1687):** في كتابه "الأصول الرياضية للفلسفة الطبيعية"، وضع القوانين الأساسية للحركة، معتمدًا على القوى والزخم الخطي. هذا المنهج المتجهي فعال للأنظمة البسيطة لكنه يتعقد بشكل كبير عند وجود قيود هندسية متعددة.
- **دالمبير (1743):** قدم مبدأه في كتابه "رسالة في الديناميك"، والذي يحول مسألة الديناميك إلى مسألة استاتيكا عن طريق إضافة قوى قصور ذاتي وهمية، بحيث يصبح مجموع القوى الفعالة وقوى القصور مساوياً للصفر لأي إزاحة افتراضية متوافقة مع القيود.
- **لاغرانج (1788):** في كتابه "الميكانيكا التحليلية"، استخدم مبدأ دالمبير مع الإحداثيات المعممة واشتق معادلته الشهيرة، متجاوزًا بذلك مشكلة حساب قوى القيد المعقدة. كان هدفه تحويل الميكانيكا إلى فرع من التحليل الرياضي الخالص.
- **هاملتون (1834):** طور لاحقًا مبدأ هاملتون (أقل فعل)، والذي يعتبر صياغة أكثر عمومية وأوسع نطاقًا، حيث أدخل مفهوم الاغرانجي والزخم المعمم في إطار متناظر.

الأهمية المنهجية

تكمن أهمية منهج لاغرانج في أنه يختزل النظام الميكانيكي كله إلى معادلة تفاضلية واحدة لكل درجة حرية، دون الحاجة إلى حساب قوى القيد (ردود الفعل، الشد، الاحتكاك الداخلي). هذا يبسط المسائل كثيرًا خاصة في الأنظمة المتعددة الروابط.

3 المفاهيم الأساسية وتعريف الرموز

الرمز	المعنى	الوحدة (SI)
t	الزمن	ثانية (s)
$\vec{r}_i$	متجه موضع الجسيم i	متر (m)
m_i	كتلة الجسيم i	كيلوغرام (kg)
$\vec{F}_i^{(a)}$	القوة المطبقة (الفعالة) على الجسيم i	نيوتن (N)

$\vec{a}_i$	تسارع الجسيم i	^{2}m/s
q_j	الإحداثي المعمم j	متغير (حسب النظام)
$\dot{q}_j$	السرعة المعممة (dq_j/dt)	متغير
L	الاغرانجي $= T - V$	جول (J)
T	الطاقة الحركية الكلية	J
V	الطاقة الكامنة الكلية	J
$\delta\vec{r}_i$	الإزاحة الافتراضية (التخيلية)	m
N	عدد الجسيمات في النظام	عدد صحيح
n	عدد الإحداثيات المعممة (درجات الحرية)	عدد صحيح

ملاحظة هامة: القيود الهولونومية تكتب بالصيغة العامة:

$$f_l(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad l = 1, \dots, k$$

حيث k هو عدد القيود. الإحداثيات المعممة q_j تُختار بحيث تُحقق هذه القيود تلقائيًا، وبالتالي عدد درجات الحرية $n = 3N - k$.

مثال توضيحي للإحداثيات المعممة

لبندول بسيط (خيط طوله ثابت l)، بدلاً من استخدام إحداثيات ديكارت (x, y) مع قيد $x^2 + y^2 = l^2$، نستخدم إحداثي واحد فقط وهو الزاوية θ من العمودي. هنا $n = 1$ بينما $N = 1$ و $k = 1$، فالنظام له درجة حرية واحدة فقط.

4 مبدأ دالمبير (D'Alembert's Principle)

الصياغة الرياضية

ينص مبدأ دالمبير على أن مجموع الشغل الافتراضي للقوى المطبقة وقوى القصور الذاتي يساوي صفرًا لأي إزاحة افتراضية متوافقة مع القيود الهندسية:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(a)} - m_i\vec{a}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1)$$

تفسير المصطلحات

- $\vec{F}_i^{(a)}$: القوة الخارجية المطبقة على الجسيم i (الجاذبية، الكهربائية، المرونية...).
- $-m_i\vec{a}_i$: قوة القصور الذاتي (كمية وهمية رياضيًا، لا تمثل قوة حقيقية).
- $\delta\vec{r}_i$: إزاحة افتراضية متناهية الصغر، يجب أن تكون متوافقة مع القيود (أي مماسة لسطح القيد إذا وجد).

الفائدة الرئيسية

في التوازن الاستاتيكي، يكون الشغل الافتراضي لقوى القيد مساويًا للصفر لأنها تكون عمودية على الإزاحات المسموحة. بما أن مبدأ دالمبير يحول المشكلة إلى توازن استاتيكي ظاهري، فإن **قوى القيد تخرج تلقائيًا** من المعادلات، وهذا هو جوهر قوة المنهج.

5 الإحداثيات المعممة والتحويل الرياضي

العلاقة بين الإحداثيات

لنظام هولونومي، يمكن التعبير عن متجهات موضع جميع الجسيمات بدلالة مجموعة الإحداثيات المعممة المستقلة والزمن:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, N \qquad (2)$$

1.5 اشتقاق السرعة والإزاحة الافتراضية*

من المعادلة (2) نحصل على السرعة الحقيقية بالاشتقاق الكلي بالنسبة للزمن:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \qquad (3)$$

أما الإزاحة الافتراضية $\delta\vec{r}_i$ فتُعرّف عند ثبات الزمن $(\delta t = 0)$:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (4)$$

علاقتان أساسيتان للاشتقاق اللاحق

من المعادلة (3) يمكن استنتاج علاقتين رياضيتين ستستخدمان في اشتقاق معادلات لاغرانج:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

العلاقة الأولى تنص على أن مشتقة السرعة بالنسبة للسرعة المعممة تساوي مشتقة الموضع بالنسبة للإحداثي المعمم. والعلاقة الثانية تبادل ترتيب الاشتقاق الزمني والاشتقاق الجزئي.

6 اشتقاق معادلات لاغرانج من مبدأ دالمبير

نبدأ من الصيغة الموسعة لمبدأ دالمبير:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1)$$

الجزء الأول: تحويل شغل القوى المطبقة

نعوض الإزاحة الافتراضية من المعادلة (4):

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{n} Q_j\delta q_j$$

حيث عرفنا **القوة المعممة** Q_j بالعلاقة:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad (5) \qquad (2)$$

الطابع العام للقوة المعممة

القوة المعممة Q_j ليست بالضرورة قوة بالمفهوم الميكانيكي التقليدي. إذا كان الإحداثي q_j يمثل زاوية، فإن Q_j يمثل عزم دوران. وإذا كان q_j إزاحة خطية، فإن Q_j يمثل قوة. الوحدة تعتمد على طبيعة الإحداثي المعمم.

الجزء الثاني: تحويل حد القصور الذاتي (الاشتقاق المختصر)

نركز الآن على المصطلح $\sum_i m_i\vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i$. باستخدام $\vec{a}_i = d\vec{v}_i/dt$ والمعادلة (4):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \qquad (6)$$

التخطي الرياضي للمتطابقة الأساسية

نستخدم المتطابقة التالية (والتي يمكن التحقق منها باستخدام قاعدة اشتقاق الضرب والعلاقتين الأساسيتين المذكورتين سابقًا):

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$$

بالتعويض عن $\partial \vec{r}_i/\partial q_j = \partial \vec{v}_i/\partial \dot{q}_j$ وتبادل الاشتقات، نصل بعد جمع الحدود إلى:

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\frac{1}{2}m_i v_i^2\right]\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{1}{2}m_i v_i^2\right]$$

بمجمعة هذه النتيجة على كل الجسيمات وتعريف الطاقة الحركية الكلية $T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$، نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j \qquad (7) \qquad (3)$$

1.6 *تجمع النتائج واستقلالية الإحداثيات

نعوض المعادلتين (5) و(7) في المعادلة الأصلية (1):

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0$$

بما أن الإحداثيات المعممة مستقلة عن بعضها البعض، فإن الإزاحات الافتراضية δq_j اختيارية ومستقلة. لكي يساوي المجموع صفرًا لأي قيم لهذه الإزاحات، يجب أن يتساوى كل معامل مع الصفر:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n \qquad (8)$$

هذه هي **معادلات لاغرانج في صورتها العامة**، وتصلح لأي قوى معممة سواء كانت محافظة أو غير محافظة.

2.6 *الحالة الخاصة: القوى المحافظة

إذا كانت القوى المطبقة مشتقة من دالة طاقة كامنة $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ بحيث $\vec{F}_i^{(a)} = -\nabla_i V$، فإن القوة المعممة تأخذ الشكل:

$$Q_j = \sum_i (-\nabla_i V) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

بالتعويض في (8) ونقل الحد إلى الطرف الأيسر:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

بما أن الطاقة الكامنة V لا تعتمد على السرعات المعممة (أي $\partial V/\partial \dot{q}_j = 0$)، يمكننا دمجها داخل المشتقة الأولى:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

نعرف **دالة لاغرانج** (أو الاغرانجي) $L = T - V$، فنحصل على الصيغة النهائية المعيارية:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n} \qquad (9)$$

خصائص الصيغة النهائية

1. المعادلة **قياسية البنية**: لا تتضمن متجهات بل مشتقات جزئية لدوال طاقة قياسية.
2. عدد المعادلات يساوي تمامًا عدد درجات الحرية n (ليس $3N$).
3. قوى القيد غير ظاهرة في المعادلة نهائيًا، مما يبسط الحل الجبري.
4. الصيغة واحدة مهما كانعدد الجسيمات أو تعقيد النظام، مما يوفر خوارزمية حل موحدة.

7 مثال تطبيقي: حركة جسيم على سطح مائل

وصف المسألة

جسيم نقطة كتلته m ينزلق على سطح مائل ثابت بزاوية ميل θ، في friction of absence (بدون احتكاك). المطلوب إيجاد معادلة الحركة والتسارع باستخدام معادلات لاغرانج.

1.7 الحل الخطوة بخطوة*

1. اختيار الإحداثي المعمم: نختار الإزاحة x على طول السطح المائل، مقاسة من أعلى السطح في اتجاه الأسفل. درجة الحرية $n = 1$.

2. حساب الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

3. حساب الطاقة الكامنة: نختار مستوى المرجع عند قمة السطح ($x = 0$). ارتفاع الجسيم $h = -x \sin\theta$ (الإشارة سالبة لأن x موجب للأسفل). إذن:

$$V = mgh = -mgx \sin\theta$$

4. بناء دالة لاغرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \sin\theta$$

5. تطبيق معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

نحسب المشتقات:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \sin\theta$$

بالتعويض:

$$m\ddot{x} - mg \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = g \sin\theta$$

2.7 التحقق والمقارنة*

النتيجة $\ddot{x} = g \sin\theta$ تطابق تمامًا ما يعطيه قانون نيوتن الثاني ($\sum F_x = mg \sin\theta = ma$).

الملاحظة الجوهرية: بطريقة نيوتن، كان يجب تحليل قوة الجاذبية إلى مكونين (موازٍ وعمودي على السطح) ثم حساب قوة رد الفعل العمودية N (التي لا نحتاجها أصلاً لإيجاد الحركة). أما بطريقة لاغرانج، فقد ظهرت المعادلة مباشرة دون أي ذكر لرد الفعل، لأن الإحداثي x اختير بحيث يتفق مع القيد (الحركة على السطح) منذ البداية.

8 مقارنة منهجية بين نيوتن ولاغرانج

جدول المقارنة الموضوعي

وجه المقارنة	الميكانيكا النيوتنية	الميكانيكا اللاغرانجية
الكمية الأساسية	القوى والمتجهات	الطاقة والدوال القياسية
التعامل مع القيود	يجب إدخال قوى القيد وحسابها	تُستبعد تلقائيًا عبر الاختيار الذكي للإحداثيات
عدد المعادلات	يصل إلى $3N$ (حيث N عدد الجسيمات)	يساوي n (عدد درجات الحرية فقط)
الصعوبة الرياضية	تفاضل وتكامل متجهي، قد يكون معقدًا في الإحداثيات المنحنية	تفاضل جزئي لعبارات سكلرية، أكثر انتظامًا
المعلومات المستخرجة	تعطي قوى القيد (ردود الفعل، الشد)	لا تعطي قوى القيد مباشرة (إلا باستخدام مضاعفات لاغرانج)
نطاق التطبيق الأمثل	أنظمة بسيطة، أو عندما تكون قوى القيد مطلوبة لذاتها	أنظمة متعددة القيود، آليات معقدة، بندولات مركبة

معيار الاختيار العملي

يُفضل منهج نيوتن عندما يكون النظام بسيطًا نسبيًا وعند الحاجة المباشرة لمعرفة قوى القيد (مثل حساب شد حبل أو رد فعل محور). أما منهج لاغرانج فيُفضل عندما يزداد تعقيد النظام (عدة قيود هندسية، أجسام مرتبطة، إحداثيات منحنية)، حيث يوفر إطارًا منهجيًا موحدًا ويقلل احتمالات الخطأ في التحليل المتجهي.

9 الخاتمة

تم في هذا العرض تقديم اشتقاق رياضي لمعادلات لاغرانج انطلاقًا من مبدأ دالمبير، مع توضيح الخطوات الوسطى والفرضيات الضمنية. يمكن تلخيص النتائج الرئيسية في النقاط التالية:

1. **مبدأ دالمبير** يشكل الجسر المنهجي بين الصياغة المتجهية (نيوتن) والصياغة (لاغرانج)، حيث يحول مسألة الديناميك إلى مسألة توازن افتراضي.

2. **الإحداثيات المعممة** تسمح بوصف النظام بأقل عدد ممكن من المتغيرات المستقلة، مما يؤدي تلقائيًا إلى استبعاد قوى القيد من المعادلات الحركية.

3. **معادلات لاغرانج** (الصيغة العامة والصيغة المحافظة) تمثل أداة رياضية منتظمة وقوية، خاصة في التعامل مع الأنظمة ذات القيود الهولونومية المعقدة.

إن الانتقال من صياغة نيوتن إلى صياغة لاغرانج ليس مجرد تغيير شكلي في الصيغ الرياضية، بل يمثل تغيرا نوعيا في المنهج: من تحليل القوى المتجهية إلى تحليل بنية الطاقة للنظام. هذا التغيير المنهجي يفتح البحث نحو التعميمات الأكثر تجريدًا مثل ميكانيكا هاملتون ومبدأ الفعل الأقل، والتي تشكل الأساس النظري للميكانيكا الكلاسيكية المتقدمة والنظرية الحديثة للحقول.

المراجع

[1] Brizard, A. J. ,2007) July .(7 *An Introduction to Lagrangian Mechanics*. Department of Chemistry and Physics, Saint Michael's College, Colchester, VT.